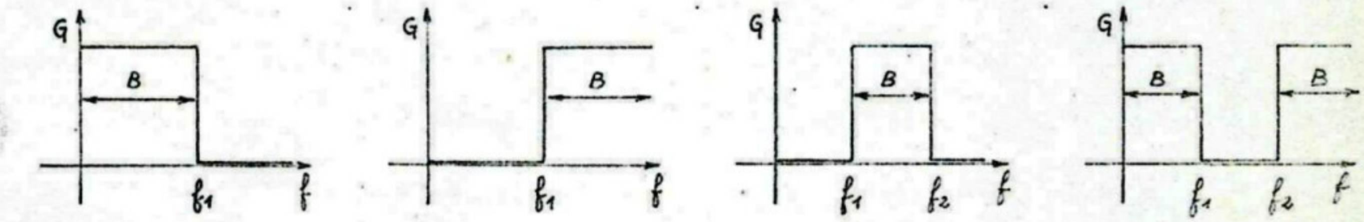
Définitions relatives aux filtres
Études d'exemples-types

1. Classification des filtres

Un filtre est un quadripôle qui favorise le passage d'une certaine bande de fréquences, qui assure une sélection des fréquences. L'idéal serait que le filtre permette le passage sans affaiblissement (gain unité) des tensions comprises dans une certaine bande de fréquences appelée bande passante (B). En dehors de la bande passante le gain devrait être nul.

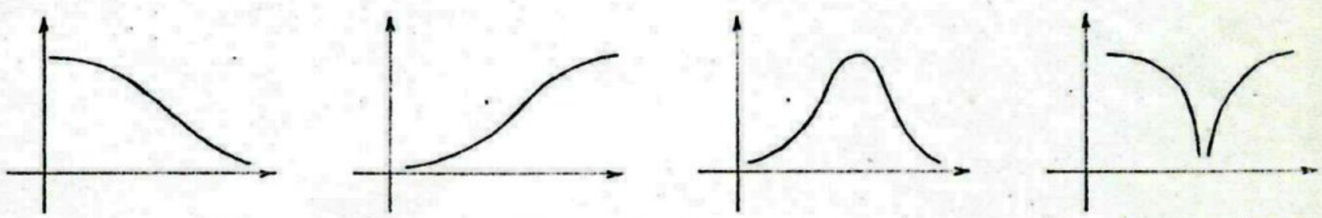
On distingue alors quatre sortes de filtres :

— passe-bas — passe-haut — passe-bande — éliminateur de bande



f_1 et f_2 sont les fréquences de coupure idéales.

Les courbes de réponse $G=f(f)$ obtenues dans la pratique peuvent être très différentes des courbes idéales, surtout avec des filtres simples. Par exemple :



Les fréquences de coupure ne sont plus nettement marquées. Il est nécessaire d'en donner une définition

2. Fréquence de coupure (f_c)

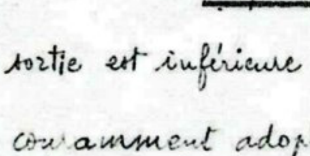
C'est la fréquence pour laquelle la tension de sortie est inférieure d'un certain nombre de décibels à la tension de sortie maximum.

La fréquence de coupure à 3 db est la plus couramment adoptée (elle est encore appelée fréquence quadrantale) : à cette fréquence la tension de sortie est sensiblement les 7/10 de la tension de sortie maximum. ($1/\sqrt{2} = 0{,}707$). A cette fréquence de coupure correspond une bande passante à 3 db.

40

3. Exemple de filtre passe-bas : filtre R.C

3.1. Étude du gain (courbe de réponse en amplitude : $G=f(f \text{ ou } \omega)$)



La tension U_1 d'amplitude constante et de fréquence variable se répartit, proportionnellement aux impédances, entre R et C. Quand $f \to \infty$ $1/C\omega \to 0$ et $U_2 \to 0$ (les hautes fréquences ne "passent" pas). Quand $f \to 0$ $1/C\omega \to \infty$ $U_2 \to U_1$ (les basses fréquences passent). Il s'agit bien d'un filtre passe-bas (bien qu'il soit peu efficace comme on le verra plus loin)

$\overline{G} = \dfrac{\overline{U_2}}{\overline{U_1}} = \dfrac{j\frac{1}{C\omega}}{R + j\frac{1}{C\omega}} = \dfrac{1}{1 + jRC\omega}$ en module $G = \dfrac{1}{\sqrt{1 + R^2 C^2 \omega^2}}$

Remarquons tout de suite que la fréquence de coupure est la fréquence f_c telle que $R^2 C^2 \omega_c^2 = 1$

soit $\boxed{\omega_c = \dfrac{1}{R.C}}$ (pulsation de coupure) $f_c = \dfrac{1}{2\pi R.C}$.

Par exemple : si $R = 1600\,\Omega$ et $C = 1\mu F$ $f_c \# 100$ Hz . A cette fréquence $U_2 \# 0{,}7.U_1$

Posons $\omega_c = 1/RC \Longrightarrow \overline{G} = \dfrac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$ ω est variable avec f, ω_c est fixée pour un filtre donné

Le rapport ω/ω_c est appelé pulsation réduite . Si on pose enfin $\omega/\omega_c = x$ on arrive à l'expression réduite du gain

$$\boxed{\overline{G} = \frac{1}{1 + jx}}$$

(Lorsque f varie de 0 à ∞ en passant par f_c , x varie de 0 à ∞ en passant par 1)

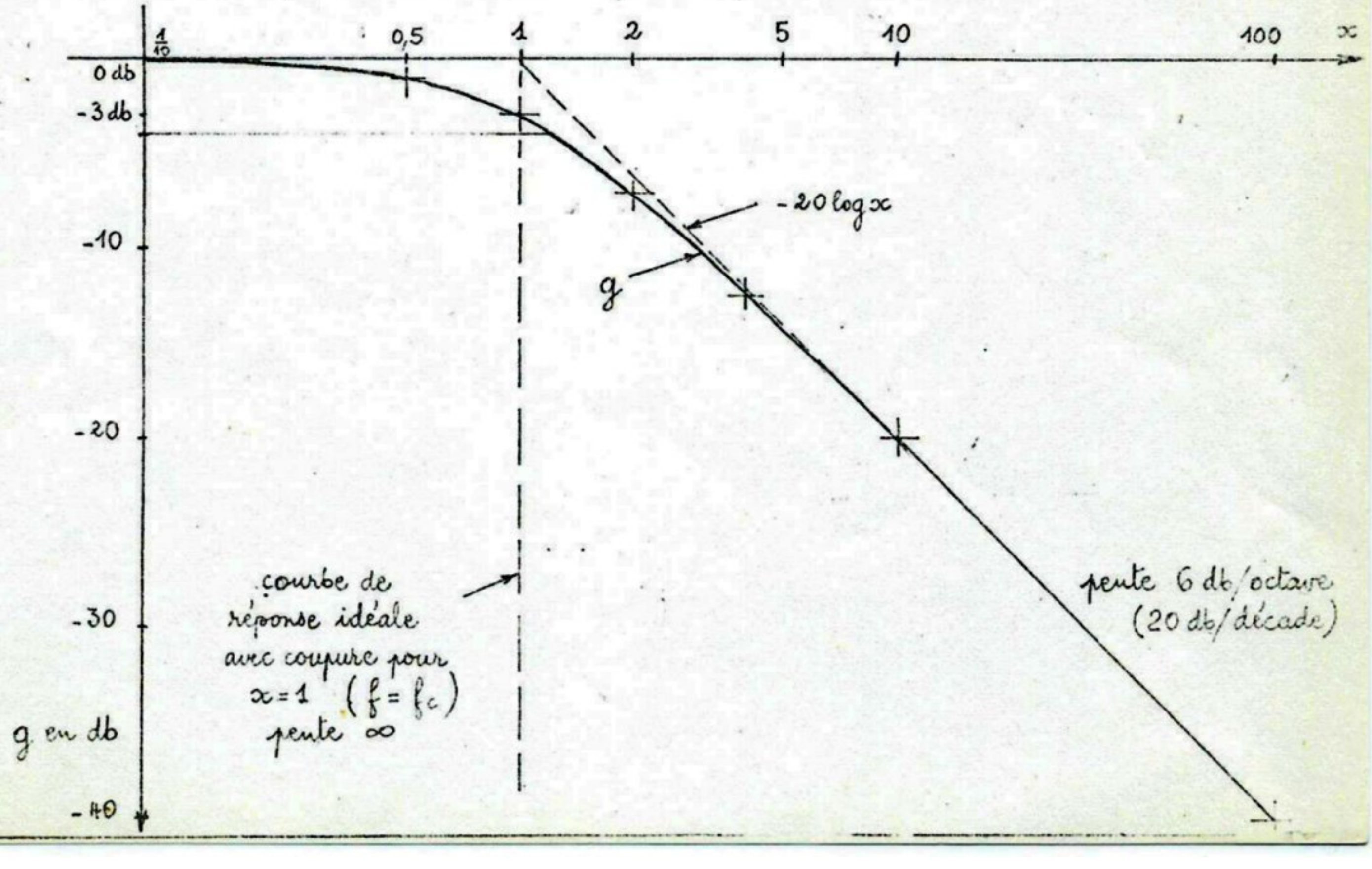
— Tracé de la courbe de réponse $G = f(f)$ ou $G = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ avec $x = \dfrac{\omega}{\omega_c} = \dfrac{f}{f_c}$

En décibels $g = 20 \log \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = -20 \log \sqrt{1+x^2} = -10.\log(1+x^2)$

- fonction négative, monotone décroissante.
- quand $x \to 0$. $g \to 0$ db
- quand $x \to \infty$ $g \to -\infty$
- $x \geqslant 10$ $(f \geqslant 10 f_c)$ $g \# -10 \log x^2$ $\# -20.\log x$

x	0	0,1	0,5	1	2	5	10
$1+x^2$	1	#1	5/4	2	5	26	#100
g	0	#0	#-1	-3	-7	-14	#-20 db

Pour $x \geqslant 10$ la fonction étudiée se confond pratiquement avec la fonction $-20 \log x$ qui est une droite si on prend une échelle logarithmique en abscisses.



41

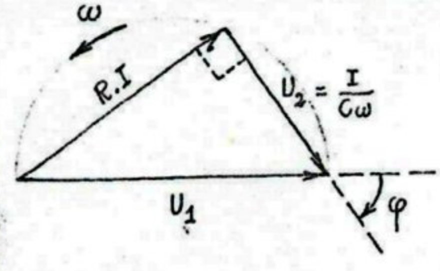
<u>Remarque :</u> Dans l'intervalle où la courbe est confondue avec la droite $-20.\log x$, le gain varie de 6 db toutes les fois qu'on franchit un octave (fréquence double ou moitié) ou de 20 db toutes les fois qu'on franchit une décade (rapport 10 ou 1/10)

ex $x = 10$ $g = -20$ db

à l'octave supérieur $x = 20$ $g = -26$ db.

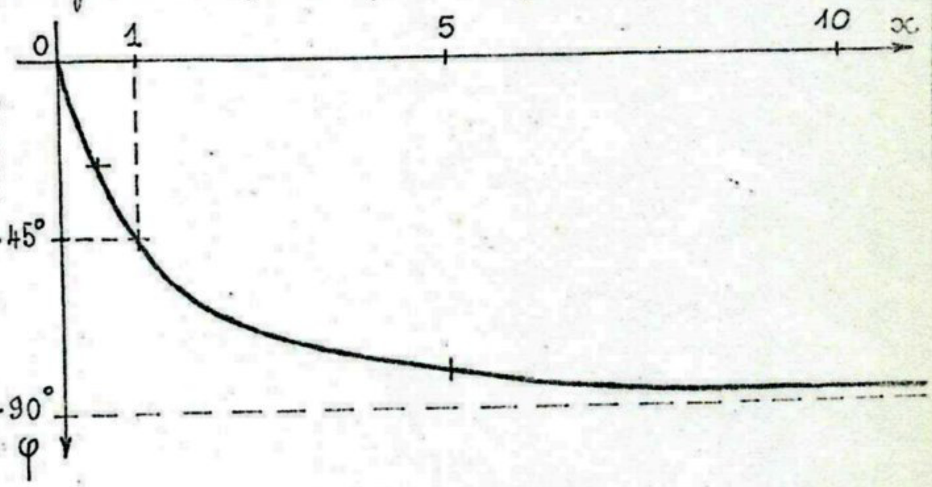
<u>Cette pente est faible</u>, très éloignée de la pente idéale qui est infinie. Les fréquences supérieures à la fréquence de coupure ne sont pas suffisamment atténuées, du moins au voisinage de f_c.

3.2. <u>Étude du déphasage</u> entre U_2 et U_1 : courbe de réponse en phase $\varphi = f(x)$



On a vu que $\overline{G} = \dfrac{1}{1 + jx}$ ou $\dfrac{\overline{U_2}}{\overline{U_1}} = G\underline{/\varphi}$

φ est aussi l'argument de $\overline{G}$, soit, en appliquant la règle de l'argument d'un quotient : $\varphi = -\operatorname{arc\,tg} x$

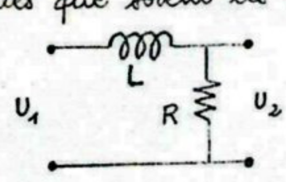


x	0	0,5	1	5	∞
φ	0	$-27°$	$-45°$	$-79°$	$-90°$

U_2 est <u>en retard</u> sur U_1 d'un angle φ qui varie de 0 à $-90°$ avec la fréquence, en passant par $-45°$ à la fréquence de coupure.

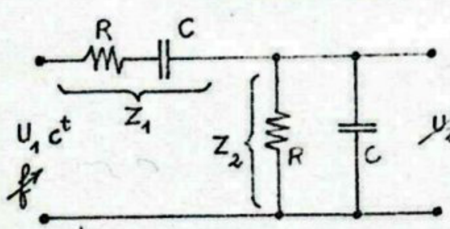
3.2. <u>Remarques</u> :

L'emploi de la pulsation réduite x rend les <u>courbes</u> ci-dessus <u>universelles</u>, c'est à dire utilisables quelles que soient les valeurs de R et de C.



De plus ces courbes sont valables pour un filtre passe-bas RL à résistance et inductance à condition de poser $\omega_c = \dfrac{R}{L}$

4. <u>Premier exemple de filtre passe-bande :</u> filtre RC dit "filtre de Wien"



$$\overline{Z_1} = R + \frac{1}{jC\omega}$$

$$\overline{Z_2} = \frac{R}{1 + jRC\omega}$$

Pour simplifier l'écriture, exprimons l'inverse du gain :

$$\frac{\overline{U_1}}{\overline{U_2}} = \frac{1}{\overline{G}} = \frac{\overline{Z_1} + \overline{Z_2}}{\overline{Z_2}} = 1 + \frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}}$$

$$= 1 + \frac{(1 + jRC\omega)^2}{jRC\omega}$$

42

Par analogie avec l'étude précédente posons $\frac{1}{RC} = \omega_0$ (ω_0 étant une pulsation que l'on précisera par la suite.) et $\frac{\omega}{\omega_0} = x$

Il vient

$$\frac{1}{\overline{G}} = 1 + \frac{(1 + jx)^2}{jx} = 3 + j\left(x - \frac{1}{x}\right) \Longrightarrow \boxed{\overline{G} = \frac{\overline{U_2}}{\overline{U_1}} = \frac{1}{3 + j\left(x - \frac{1}{x}\right)}}$$

Remarquons que $\overline{G}$ est maximum lorsque le dénominateur est minimum, c'est à dire lorsque $x = 1$ ($\omega = \omega_0$) ; ω_0 est donc la pulsation pour laquelle le gain, donc la tension de sortie, est maximum. On a alors
$\overline{G} = 1/3$ $\quad$ $U_{2m} = U_1/3$ $\quad$ et U_1 et U_{2m} en phase.

Tracé de la courbe de réponse en amplitude. En module on a $G = \dfrac{1}{\sqrt{9+\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}}$

Le gain en décibels est donc :

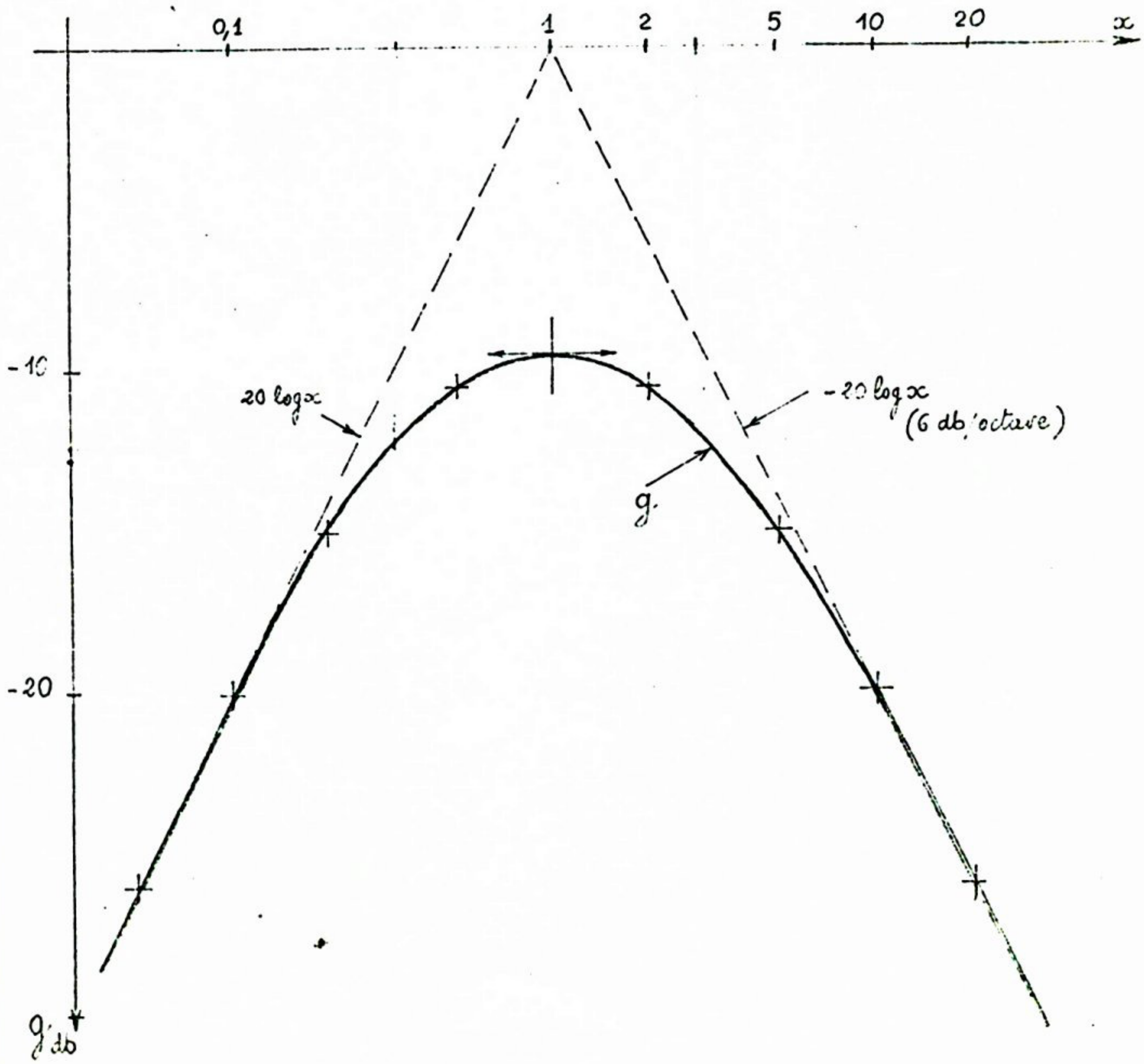
$$\boxed{g = 20 \log G = -10 \log \left[9 + \left(x - \frac{1}{x}\right)^2\right]}$$

- fonction toujours négative
- maximum pour $x = 1 \Rightarrow g_{max} = -9{,}5$ db
- si on change x en $\frac{1}{x}$ g ne change pas

on peut donc se contenter d'étudier la fonction dans l'intervalle $[1, \infty]$. De plus, avec une échelle logarithmique pour x, le graphe présente une symétrie par rapport à l'abscisse $x = 1$

- quand $x \geqslant 10$ $\quad g \# -20 \log x$ (droite)
-

ω	ω_0					∞	
x	1	2	5	10	20	∞	
g	-9,5	-10,5	-15	-20	-26	$-\infty$	db



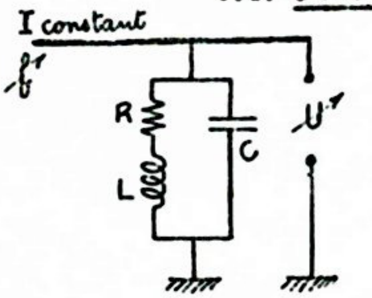
Remarques

— les fréquences de coupure et la bande passante à 3 db se réfèrent en partant du maximum.

— La courbe est universelle. Elle est valable pour un filtre passe-haut obtenu en remplaçant les capacités par des inductances à condition de poser $\omega_0 = R/L$.

5. Deuxième exemple de filtre passe-bande : circuit résonant RLC parallèle.

5.1. Etude du gain.



Considérons un circuit RLC parallèle alimenté par un courant d'amplitude constante et de fréquence variable.

Soit Z l'impédance du circuit, à la fréquence f

$$\overline{U} = \overline{Z}.\overline{I}$$

A la résonance ($f_0 = 1/2\pi\sqrt{LC}$) l'impédance est maximum et la tension de sortie également

$$\overline{U_0} = \overline{Z_0}.\overline{I}$$

On pose ici

$$\overline{G} = \frac{\overline{U}}{\overline{U_0}} = \frac{\overline{Z}}{\overline{Z_0}}$$

L'admittance du circuit est $\overline{Y} = \frac{1}{\overline{Z}} = jC\omega + \frac{1}{R + jL\omega} = \frac{jRC\omega - LC\omega^2 + 1}{R + jL\omega}$

Pour un circuit de bonne qualité ($Q \geq 10$) utilisé au voisinage de la résonance, l'inégalité $R \ll L\omega$ est vérifiée et on peut écrire.

$$\overline{Y} \# \frac{RC}{L} + j\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right) \quad \text{et} \quad \overline{Y_0} \# \frac{RC}{L}$$

Donc
$$\overline{G} = \frac{\overline{Z}}{\overline{Z_0}} = \frac{\overline{Y_0}}{\overline{Y}} = \frac{1}{1 + j\left(\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega}\right)}$$

En tenant compte de l'expression de $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$ et en posant $\frac{\omega}{\omega_0} = x$

$$\boxed{\overline{G} = \frac{\overline{U}}{\overline{U_0}} = \frac{1}{1 + jQ.\left(x - \frac{1}{x}\right)}}$$

Le module du gain est $G = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2.\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}$, soit, en décibels

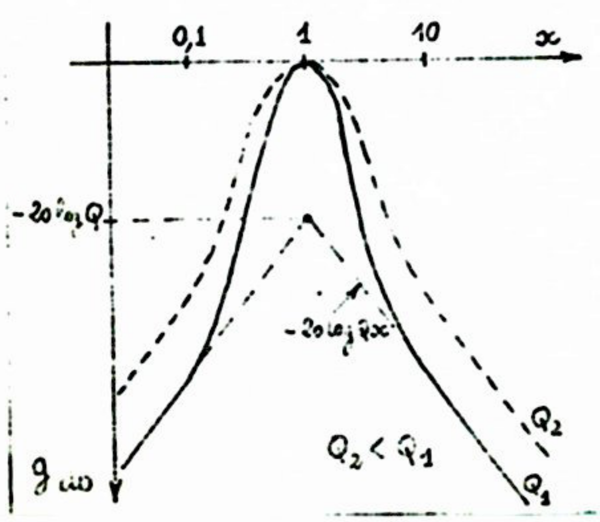
$$\boxed{g_{db} = -10.\log\left[1 + Q^2.\left(x - \frac{1}{x}\right)^2\right]}$$

C'est l'équation de la courbe de réponse en amplitude (elle n'est pas universelle car elle fait intervenir le Q du circuit).

Pour $x \geq 10$ $\quad g \# -20\log Q.x = -20\log Q - 20\log x$ (droites)

Lorsque le coefficient de qualité diminue les droites montent et la courbe de réponse s'élargit. Ainsi la courbe en trait interrompu correspond à un circuit dont le coefficient Q_2 est inférieur à Q_1. La bande passante du circuit 2 est plus large que celle du circuit 1. Le circuit 2 est moins sélectif que le circuit 1.

44



5.2. Sélectivité (S)   C'est l'inverse du gain

$$\overline{S} = 1 + jQ.\left(x - \frac{1}{x}\right) = \frac{\overline{U_0}}{\overline{U}}$$ soit en module $$S = \frac{U_0}{U} = \sqrt{1 + Q^2.\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}$$

On a toujours $U_0 > U$ donc $S > 1$
Par exemple, si $Q = 10$ et si $f = 1{,}2.f_0 \implies x = f/f_0 = 1{,}2$ et $S \# 3{,}8$
, ce qui signifie que la tension à la fréquence f est 3,8 fois plus petite que la tension à la résonance.

<u>Plus le coefficient Q est grand et plus le circuit est sélectif.</u>

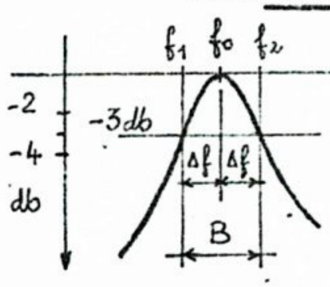
La sélectivité s'exprime aussi d'une autre manière. En effet :

$$x - \frac{1}{x} = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = \frac{(\omega + \omega_0).(\omega - \omega_0)}{\omega_0 . \omega}$$

au voisinage de ω_0 $\omega + \omega_0 \# 2\omega$
d'autre part $\omega - \omega_0 = \Delta\omega$

Donc $x - \frac{1}{x} \# \frac{2\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{2\Delta f}{f_0} \Longrightarrow$ $$S \# \sqrt{1 + 4Q^2.\left(\frac{\Delta f}{f_0}\right)^2}$$ $\Delta f = f - f_0$

5.3. Bande passante à 3 db



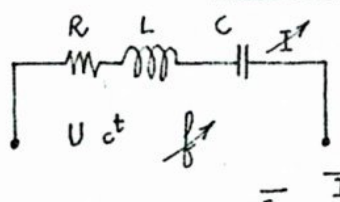
Il y a 2 fréquences atténuées de 3 db par rapport à f_0. Pour ces fréquences on a $\frac{U_0}{U} = \sqrt{2}$ donc $S = \sqrt{2}$

D'après l'expression ci-dessus de S, on a alors

$$2Q.\frac{\Delta f}{f_0} = 1 \quad \text{ou} \quad 2\Delta f = \frac{f_0}{Q} \Longrightarrow \boxed{B = \frac{f_0}{Q}}$$

Plus le coefficient de qualité est élevé, plus la bande passante est étroite et plus le circuit est sélectif.

5.4. Cas d'un circuit RLC série (alimenté par une tension d'amplitude constante et de fréquence variable)



A la résonance on a un minimum d'impédance ($Z_0 = R$) et un maximum de courant (I_0)

$$\overline{G} = \frac{\overline{I}}{\overline{I_0}} = \frac{\overline{Z_0}}{\overline{Z}} = \frac{R}{R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)} = \frac{1}{1 + j\left(\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega}\right)} = \frac{1}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$$

Comme pour le circuit parallèle.
Les relations établies précédemment ainsi que les courbes sont donc valables mais le gain, comme la sélectivité, est un rapport de courants.

6. Exemple de filtre éliminateur de bande : double T à résistances-capacités (voir théorème de Kennely)

$$\overline{G} = \frac{\overline{U_s}}{\overline{U_e}} = \frac{1}{1 + \frac{4jRC\omega}{1 - R^2 C^2 . \omega^2}} = \frac{1}{1 + \frac{4jx}{1 - x^2}}$$ avec $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ $x = \frac{\omega}{\omega_0}$

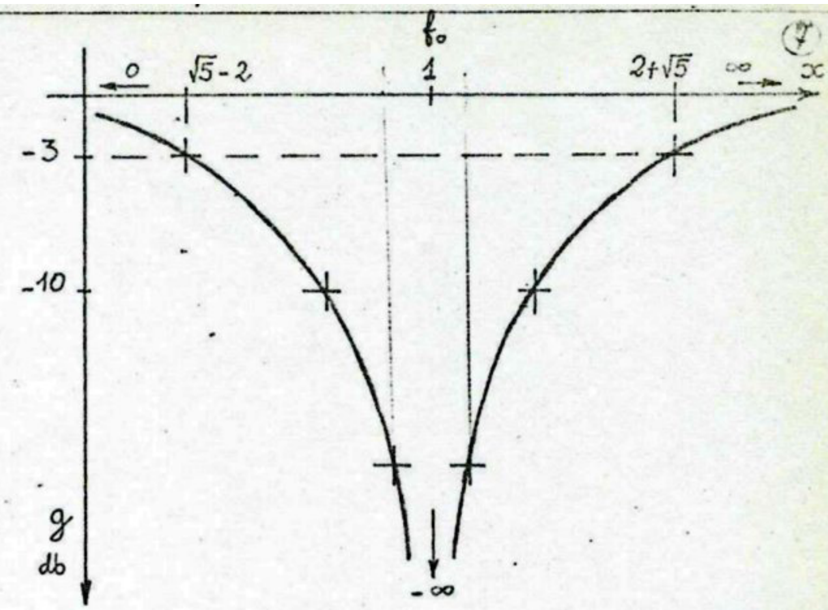
45

— <u>Réponse en amplitude</u>

le module de G est $$G = \frac{U_s}{U_e} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{16x^2}{(1 - x^2)^2}}}$$

soit en décibels $$g = 20 \log \frac{U_s}{U_e} = -10 \log\left[1 + \frac{16x^2}{(1 - x^2)^2}\right]$$

f	0		$f_0 = \frac{1}{2\pi RC}$		∞
x	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	∞
g	0 db	$\searrow$	$-\infty$	$\nearrow$	0 db
U_s	U_e	$\searrow$	0	$\nearrow$	U_e



7. Exercices.

7.1. Soit un filtre passe-bas avec $R = 2{,}2\ k\Omega$ $C = 10\ nF$. On demande :
. la bande passante si on tolère un affaiblissement limité à -4 db.
. la fréquence à partir de laquelle l'atténuation est supérieure à 40 db.

7.2. Un filtre passe-bas constitué d'une inductance inconnue et d'une résistance de $47\ k\Omega$ est donné pour une fréquence de coupure de 15 kHz. Calculer l'inductance de la bobine. Comment faut-il modifier le circuit sans changer R ni L pour la fréquence de coupure soit descendue à 10 kHz ?

7.3. A une tension continue se trouve superposée une tension sinusoïdale de fréquence 100 Hz, indésirable. On estime que celle-ci ne sera plus gênante si son amplitude est divisée par 20. Déterminer la résistance R à associer à une capacité C de $12\ \mu F$ afin d'obtenir le résultat souhaité.

7.4. En vous inspirant du paragraphe 3 ci-dessus étudiez la réponse en amplitude d'un filtre passe-haut RC. Précisez le filtre RC correspondant.

7.5. Un filtre de Wien est monté avec $R = 7\ k\Omega$ et $C = 5\ nF$. Déterminer la fréquence centrale et la bande passante à 3 db.

7.6. On désire favoriser un signal provenant d'un émetteur de radiodiffusion occupant une bande de fréquences de 10 kHz centrée sur la fréquence 1 MHz. On dispose pour cela d'un tube amplificateur pentode de résistance interne $1\ M\Omega$, d'une bobine ($L = 125\ \mu H$ $r = 4\ \Omega$ à 1 MHz) et d'un condensateur ajustable. Calculer :

a) la valeur à donner au condensateur ajustable C

b) la bande passante obtenue en associant L et C en parallèle au tube pentode

c) la résistance à disposer en parallèle avec L et C afin d'obtenir la bande passante souhaitée.

d) même question qu'au b) si on remplaçait la pentode par une triode de résistance interne $20\ k\Omega$.

7.7. Un filtre éliminateur de bande en double T est monté avec
46 $R = 32\ k\Omega$ et $C = 1250\ pF$. Calculer la fréquence pour laquelle la tension de sortie est nulle ainsi que la bande de fréquences éliminées si on considère que cette élimination est effective lorsque la tension de sortie est au moins dix fois plus faible que la tension d'entrée.